

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（医学科）

対象年度：2024年

試験時間：90分

問題数：3問

配点：120点

第 1 問

n を 2 以上の自然数とする。自然数の組 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ を解とする方程式

$$(*) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$$

を考えると、以下の各問いに答えよ。

- (1) $n = 3$ のとき、 $(*)$ の解 (a_1, a_2, a_3) のうち、 $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ を満たすものをすべて求めよ。
- (2) $n \geq 3$ のとき、 $(*)$ の任意の解 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ において、 $a_i = 1$ となる i が少なくとも 1 つ存在することを示せ。
- (3) $(*)$ のある解 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ において、 $a_i = 1$ となる i がちょうど 2 個存在しているとする。このとき、 n の取り得る値をすべて求めよ。

第 2 問

xyz 空間において, 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(-1, 0, 0)$, $D(0, 0, 1)$ をとり, 線分 CD の中点を M とする。さらに, N を線分 BD 上の点とする。また, z 軸と平行でない直線上の異なる 2 点 $P(x, y, z)$, $Q(x', y', z')$ に対して,

$$\frac{z' - z}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}}$$

をベクトル $\overrightarrow{PQ}$ の勾配と呼ぶ。 $\overrightarrow{AN}$ の勾配を t_1 , $\overrightarrow{NM}$ の勾配を t_2 とするとき, 以下の各問いに答えよ。

- (1) $t_2 = 0$ となるように N をとったとき, t_1 の値を求めよ。
- (2) $l = |\overrightarrow{AN}| + |\overrightarrow{NM}|$ とし, l が最小となるように N をとったとき, l の値を求めよ。
- (3) $0 \leq t_2 \leq t_1$ となるように N をとったとき, N の y 座標を s とする。 s がとり得る値の範囲を求めよ。

第 3 問

$f(x)$ を連続関数とすると、次の各問いに答えよ。

(1) 次の等式を示せ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \cos x \, dx$$

(2) 次の等式を示せ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x + \cos x) \, dx = \int_{-1}^1 f(1-t^2) \, dt$$

(3) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sqrt{\sin 2x}} \, dx$$