

# 入学試験過去問題

## 数 学

### 東京科学大学（医学科）

対象年度：2022年

試験時間：90分

問題数：3問

配点：120点

## 第 1 問

$n$  を自然数とする。整数  $i, j$  に対し,  $xy$  平面上の点  $P_{i,j}$  の座標を

$$\left( \cos \frac{2\pi}{n} i + \cos \frac{2\pi}{n} j, \quad \sin \frac{2\pi}{n} i + \sin \frac{2\pi}{n} j \right)$$

で与える。さらに,  $i, j$  を動かしたとき,  $P_{i,j}$  の取り得る異なる座標の個数を  $S_n$  とする。  
このとき, 以下の各問いに答えよ。

- (1)  $n = 3$  のとき,  $\triangle P_{0,0}P_{0,1}P_{0,2}$  および  $\triangle P_{1,0}P_{1,1}P_{1,2}$  を同一座標平面上に図示せよ。
- (2)  $S_4$  を求めよ。
- (3) 平面上の異なる 2 点  $A, B$  に対して,  $AQ = BQ = 1$  であるような同一平面上の点  $Q$  はいくつあるか。 $AB = d$  の値で場合分けして答えよ。
- (4)  $S_n$  を  $n$  を用いて表せ。

## 第 2 問

$xy$  平面上の放物線  $P: y^2 = 4x$  上に異なる 2 点  $A, B$  をとり,  $A, B$  それぞれにおいて  $P$  への接線と直交する直線を  $n_A, n_B$  とする。 $a$  を正の数として, 点  $A$  の座標を  $(a, \sqrt{4a})$  とするとき, 以下の各問いに答えよ。

- (1)  $n_A$  の方程式を  $a$  を用いて表せ。
- (2) 直線  $AB$  と直線  $y = \sqrt{4a}$  とがなす角の 2 等分線のひとつが,  $n_A$  に一致するとき, 直線  $AB$  の方程式を  $a$  を用いて表せ。
- (3) (2) のとき, 点  $B$  を通る直線  $r_B$  を考える。 $r_B$  と直線  $AB$  とがなす角の 2 等分線のひとつが,  $n_B$  に一致するとき,  $r_B$  の方程式を  $a$  を用いて表せ。
- (4) (3) のとき, 直線  $AB$  と放物線  $P$  で囲まれた図形の面積を  $S_1$  とし,  $P$  と直線  $y = \sqrt{4a}$ , 直線  $x = -1$  および (3) の  $r_B$  で囲まれた図形の面積を  $S_2$  とする。 $a$  を変化させたとき,  $\frac{S_1}{S_2}$  の最大値を求めよ。

### 第 3 問

曲線  $C: y = f(x)$  ( $0 \leq x < 1$ ) が次の条件を満たすとする。

- $f(0) = 0$
- $0 < x < 1$  のとき  $f'(x) > 0$
- $0 < a < 1$  を満たすすべての実数  $a$  について、曲線  $C$  上の点  $P(a, f(a))$  における接線と直線  $x = 1$  との交点を  $Q$  とするとき、 $PQ = 1$

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1)  $f'(x)$  を求めよ。
- (2)  $\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)f'(x) dx$  の値を求めよ。
- (3) 曲線  $C$  と  $x$  軸, 直線  $x = 1$ , 直線  $y = f\left(\frac{1}{2}\right)$  で囲まれた図形の面積を求めよ。