

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（医学科）

対象年度：2020 年

試験時間：90 分

問題数：3 問

配点：120 点

第 1 問

N を自然数として、表と裏が等確率で出るコインを N 回投げる試行を考え、この試行の結果によって関数 $f(x)$ を次のように定義する。

1. $x \leq 0$ のとき、 $f(x) = 0$
2. x が N 以下の自然数 n に等しいとき、 n 回目に
表が出れば $f(n) = f(n-1) + 1$
裏が出れば $f(n) = f(n-1) - 1$
3. x が $0 < x < N$ を満たし、かつ自然数でないとき、 $n-1 < x < n$ を満たす自然数 n として、 $f(x) = (x-n+1)f(n) + (n-x)f(n-1)$
4. $x > N$ のとき、 $f(x) = f(N)$

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $N = 8$ のとき、試行の結果が「表, 表, 裏, 裏, 表, 裏, 裏, 裏」の順となったとき、 $f(x)$ のグラフを描け。
- (2) 自然数 N と 0 以上の整数 k について、 $f(x)$ が極値をとる点の個数が k となる確率を $P(k)$ とする。 $P(k)$ を N , k を用いて表せ。
- (3) 自然数 N と 0 以上の整数 k について、 $f(x)$ が極大となる点の個数が k となる確率を $Q(k)$ とする。 $Q(k)$ を N , k を用いて表せ。
- (4) (3) の $Q(k)$ について $\sum_{k=0}^N kQ(k)$ を N を用いて表せ。

第 2 問

a を正の実数, m を実数とし, $k_1 = m + \sqrt{m^2 + 1}$, $k_2 = m - \sqrt{m^2 + 1}$ とする。さらに, C_0 , C_1 , C_2 を複素数平面上でそれぞれ

$$\begin{aligned}C_0 &: (m+i)z + (m-i)\bar{z} + 2a = 0 \\C_1 &: (k_1+i)z + (k_1-i)\bar{z} - 2ak_1^2 = 0 \\C_2 &: (k_2+i)z + (k_2-i)\bar{z} - 2ak_2^2 = 0\end{aligned}$$

を満たす点 z の集合とする。ここで, i は虚数単位, $\bar{z}$ は z と共役な複素数を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) C_0 , C_1 , C_2 がいずれも直線であることを示せ。
- (2) C_0 と C_1 の共有点を P_1 とし, m を変化させたとき P_1 が描く曲線を F_1 とする。 F_1 はどのような曲線か。 a を用いて答えよ。
- (3) $m > 0$ のとき, C_1 , C_2 と虚軸で囲まれる領域の面積を T とし, (2) の F_1 と C_1 , C_2 , 虚軸で囲まれる領域の面積を S とする。 $\frac{T}{S}$ が a によらず一定であることを示し, その極限值 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T}{S}$ を求めよ。

第 3 問

t を正の実数とし, xyz 空間において, 7 つの点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $P(t, 1, 0)$, $Q(0, t, 1)$, $R(1, 0, t)$ をとる。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $t = 1$ のとき, 四面体 $OPQR$ の体積を求めよ。
- (2) $\triangle PQR$, $\triangle APR$, $\triangle BQP$, $\triangle CRQ$ および xy 平面, yz 平面, zx 平面で囲まれる領域の体積を V_1 とする。 V_1 を t を用いて表せ。
- (3) O を中心とし, OP を半径とする球の体積を V_2 とする。 t を変化させるとき, $\frac{V_1}{V_2}$ が最大となる t の値を求めよ。