

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（医学科）

対象年度：2019 年

試験時間：90 分

問題数：3 問

配点：120 点

第 1 問

n を 2 以上の自然数とし, ひとつのサイコロを n 回くり返し投げるとする。 n 以下の自然数 k について, k 回目に 1 から 4 の目が出たら $a_k = 1$, 5 または 6 の目が出たら $a_k = 0$ として, 数列 $\{a_k\}$ を定義する。さらに数列 $\{b_k\}$ を, $b_1 = 0$, 2 以上 n 以下の自然数 k について $b_k = (a_k + a_{k-1})(2 - a_k - a_{k-1})$ と定義する。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) k を 2 以上 n 以下の自然数とする。 $b_k = 0$ となる確率を求めよ。
- (2) $b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 1$ となる確率を n を用いて表せ。
- (3) n が 5 以上のとき, $S_n = \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{2^2} + \cdots + \frac{b_n}{2^{n-1}}$ とおく。このとき $\frac{5}{8} \leq S_n < \frac{15}{16}$ となる確率を求めよ。

第 2 問

三角形 ABC において、頂点 A, B, C の角の大きさをそれぞれ A , B , C , 対辺の長さをそれぞれ a , b , c で表す。また a , b , c は、この順で正または 0 の公差をもつ等差数列をなすとする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $C = \frac{2\pi}{3}$ のとき, $\cos A$ の値を求めよ。
- (2) $C = 2A$ のとき, $\cos A$ の値を求めよ。
- (3) $C = A + \frac{\pi}{3}$ のとき, $\cos A$ の値を求めよ。

第 3 問

a と b を実数として, xy 平面において, 2 つの曲線

$$\begin{aligned}C_1 : y &= x^4 - x^2 \\C_2 : y &= a(x^2 - 1)\end{aligned}$$

および直線

$$\ell : y = b$$

を考える。ただし C_1 と ℓ は相異なる 4 点で交わるとする。また, C_1 と C_2 は $0 < x_0 < 1$ となる交点 $P(x_0, y_0)$ をひとつもつとする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) a のとりうる値の範囲を求めよ。また x_0, y_0 を a を用いて表せ。
- (2) b のとりうる値の範囲を求めよ。また C_1 と ℓ の交点の x 座標を b を用いて表せ。
- (3) C_1 と ℓ で囲まれる領域のうち, $y \leq b$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とする。 V_1 を b を用いて表せ。
- (4) $b = y_0$ として, C_2 と ℓ で囲まれる領域のうち, $y \leq y_0$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。 $3V_1 = V_2$ のとき, a の値を求めよ。