

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（医学科）

対象年度：2016 年

試験時間：90 分

問題数：3 問

配点：120 点

第 1 問

自然数 n に対して、 n のすべての正の約数（1 と n を含む）の和を $S(n)$ とおく。例えば、 $S(9) = 1 + 3 + 9 = 13$ である。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) n が異なる素数 p と q によって $n = p^2q$ と表されるとき、 $S(n) = 2n$ を満たす n をすべて求めよ。
- (2) a を自然数とする。 $n = 2^a - 1$ が $S(n) = n + 1$ を満たすとき、 a は素数であることを示せ。
- (3) a を 2 以上の自然数とする。 $n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ が $S(n) \leq 2n$ を満たすとき、 n の 1 の位は 6 か 8 であることを示せ。

第 2 問

xyz 空間において連立不等式

$$|x| \leq 1, \quad |y| \leq 1, \quad |z| \leq 1$$

の表す領域を Q とし、正の実数 r に対して $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ の表す領域を S とする。また、 Q と S のいずれか一方のみに含まれる点全体がなす領域を R とし、 R の体積を $V(r)$ とする。さらに

$$\begin{aligned} x \geq 1 \text{ の表す領域と } S \text{ の共通部分を } S_x \\ y \geq 1 \text{ の表す領域と } S \text{ の共通部分を } S_y \\ z \geq 1 \text{ の表す領域と } S \text{ の共通部分を } S_z \end{aligned}$$

とし、

$$\begin{aligned} S_x \cap \emptyset \text{ を満たす } r \text{ の最小値を } r_1 \\ S_x \cap S_y \cap \emptyset \text{ を満たす } r \text{ の最小値を } r_2 \\ S_x \cap S_y \cap S_z \cap \emptyset \text{ を満たす } r \text{ の最小値を } r_3 \end{aligned}$$

とする。ただし、 $\emptyset$ は空集合を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $r = \frac{\sqrt{10}}{3}$ のとき、 R の xy 平面による断面を図示せよ。
- (2) r_1, r_2, r_3 および $V(r_1), V(r_3)$ を求めよ。
- (3) $r \geq r_1$ のとき、 S_x の体積を r を用いて表せ。
- (4) $0 < r \leq r_2$ において、 $V(r)$ が最小となる r の値を求めよ。

第 3 問

関数 $f(x) = \langle\langle x \rangle\rangle - 2\langle\langle x - 1 \rangle\rangle + \langle\langle x - 2 \rangle\rangle$ を考える。ここで、実数 u に対して $\langle\langle u \rangle\rangle = \frac{u + |u|}{2}$ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $g(x) = \int_0^1 f(x-t) dt$ とおくとき、 $g(x)$ の最大値を求めよ。

(3) (2) の $g(x)$ に対して、 $p(s) = \int_0^3 (x-s)^2 g(x) dx$ とおくとき、 $p(s)$ の最小値を求めよ。