

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（医学科）

対象年度：2012年

試験時間：90分

問題数：3問

配点：120点

第 1 問

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} a_1 = 5, & b_1 = 3, \\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また, 自然数 n について $c_n = a_n^2 - b_n^2$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) c_n を n を用いて表せ。
- (2) k を自然数とすると, 自然数 ℓ について

$$a_{k+\ell} = a_k a_\ell + b_k b_\ell, \quad b_{k+\ell} = b_k a_\ell + a_k b_\ell$$

が成立することを, ℓ に関する数学的帰納法によって示せ。

- (3) $n > \ell$ となる自然数 n, ℓ について

$$b_{n+\ell} - c_\ell b_{n-\ell} = 2a_n b_\ell$$

が成立することを示せ。

- (4) 2 以上の自然数 n について

$$a_{2n} + \sum_{m=1}^{n-1} c_{n-m} a_{2m} = \frac{b_{2n+1}}{2b_1} - \frac{c_n}{2}$$

が成立することを示せ。

第 2 問

$a^2 + b^2 = 1$ を満たす正の実数 a, b の組 (a, b) の全体を S とする。 S に含まれる (a, b) に対し, xyz 空間内に 3 点 $P(a, b, b)$, $Q(-a, b, b)$, $R(0, 0, b)$ をとる。また原点を O とする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) 三角形 OPQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_1 とする。 (a, b) が S の中を動くとき, F_1 の体積の最大値を求めよ。
- (2) 三角形 PQR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_2 とする。 $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, F_2 の xy 平面による切り口の周を xy 平面上に図示せよ。
- (3) 三角形 OPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_3 とする。 (a, b) が S の中を動くとき, F_3 の体積の最大値を求めよ。

第 3 問

関数 $f(x) = x^3 - x^2 + x$ について、以下の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$ はつねに増加する関数であることを示せ。

(2) $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とおく。 $x > 0$ について

$$\sqrt[3]{x} - 1 < g(x) < \sqrt[3]{x} + 1$$

が成立することを示せ。

(3) $b > a > 0$ について

$$0 < \int_a^b \frac{1}{x^2 + 1} dx < \frac{1}{a}$$

が成立することを示せ。

(4) 自然数 n について、(2) で定義された $g(x)$ を用いて

$$A_n = \int_n^{2n} \frac{1}{\{g(x)\}^3 + g(x)} dx$$

とおくとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ を求めよ。