

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（医学科）

対象年度：2011 年

試験時間：90 分

問題数：3 問

配点：120 点

第 1 問

ある硬貨を投げたとき、表と裏がそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で出るとする。この硬貨を投げる操作を繰り返し行い、3 回続けて表が出たときこの操作を終了する。自然数 n に対し、操作がちょうど n 回目で終了となる確率を P_n 、操作が n 回以上繰り返される確率を Q_n とする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 をそれぞれ求めよ。
- (2) Q_6, Q_7 をそれぞれ求めよ。
- (3) $n \geq 5$ のとき、 $Q_n - Q_{n-1}$ を Q_{n-4} を用いて表せ。
- (4) $n \geq 4$ のとき、 $Q_n < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-3}{4}}$ が成り立つことを示せ。

第 2 問

座標平面において、原点を O とし、次のような 3 点 P , Q , R を考える。

- (a) 点 P は x 軸上にあり、その x 座標は正である。
- (b) 点 Q は第 1 象限にあって、 $OQ = QP = 1$ を満たす。
- (c) 点 R は第 1 象限にあって、 $OR + RP = 2$ を満たし、かつ線分 RP が x 軸に垂直となる。

ただし、座標軸は第 1 象限に含めないものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) 上の条件を満たす 2 点 Q , R が存在するような、点 P の x 座標が取りうる値の範囲を求めよ。
- (2) (1) の範囲を点 P が動くとき、線分 QR が通過する領域を図示し、その面積を求めよ。
- (3) 線分 OP の中点を M とする。(1) の範囲を点 P が動くとき、四角形 $MPRQ$ の面積を最大にする点 P の x 座標を求めよ。

第 3 問

自然数 n に対し

$$S_n = \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$$

とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) 次の不等式を示せ。

$$\left| S_n - \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

- (2) $T_n - 2S_n$ を n を用いて表せ。

- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ を求めよ。