

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（医学科）

対象年度：2010 年

試験時間：90 分

問題数：3 問

配点：120 点

第 1 問

a, b, c を相異なる正の実数とすると、以下の各問いに答えよ。

- (1) 次の 2 数の大小を比較せよ。

$$a^3 + b^3, \quad a^2b + b^2a$$

- (2) 次の 4 数の大小を比較し、小さい方から順に並べよ。

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2), \quad (a+b+c)(ab+bc+ca), \\ 3(a^3+b^3+c^3), \quad 9abc$$

- (3) x, y, z を正の実数とすると

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z}$$

のとりうる値の範囲を求めよ。

第 2 問

座標空間において、8点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(0, 1, 1)$, $E(1, 0, 1)$, $F(1, 1, 0)$, $G(1, 1, 1)$ をとり、この8点を頂点とする立方体を Q とする。また点 $P(x, y, z)$ と正の実数 t に対し、6点 $(x+t, y, z)$, $(x-t, y, z)$, $(x, y+t, z)$, $(x, y-t, z)$, $(x, y, z+t)$, $(x, y, z-t)$ を頂点する正八面体を $\alpha_t(P)$, その外部の領域を $\beta_t(P)$ で表す。ただし、立方体および正八面体は内部の領域も含むものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $0 < t \leq 1$ のとき、 $Q \cap \beta_t(O) \cap \beta_t(D) \cap \beta_t(E) \cap \beta_t(F)$ の体積、すなわち5つの領域 Q , $\beta_t(O)$, $\beta_t(D)$, $\beta_t(E)$, $\beta_t(F)$ の共通部分の体積を t で表せ。
- (2) $Q \cap \alpha_1(O) \cap \beta_1(A) \cap \beta_1(B) \cap \beta_1(C)$ の体積を求めよ。
- (3) $0 < t \leq 1$ のとき、

$$Q \cap \beta_t(O) \cap \beta_t(A) \cap \beta_t(B) \cap \beta_t(C) \cap \beta_t(D) \cap \beta_t(E) \cap \beta_t(F) \cap \beta_t(G)$$

の体積を t で表せ。

第 3 問

xy 平面において、次の円 C と楕円 E を考える。

$$C : x^2 + y^2 = 1$$

$$E : x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$

また、 C 上の点 $P(s, t)$ における C の接線を l とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) l の方程式を s, t を用いて表せ。

以下、 $t > 0$ とし、 E が l から切り取る線分の長さを L とする。

(2) L を t を用いて表せ。

(3) P が動くとき、 L の最大値を求めよ。

(4) L が (3) で求めた最大値をとるとき、 l と E が囲む領域のうち、原点を含まない領域の面積を A とする。 A の値を求めよ。