

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（医学科）

対象年度：2007 年

試験時間：90 分

問題数：3 問

配点：120 点

第 1 問

以下の各問いに答えよ。

- (1) 底面の半径が r 、高さが h の直円錐の側面積を r と h を用いて表せ。
- (2) 座標平面上の 4 点 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $E\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $F(0, 1)$ を考える。
四角形 ABEF を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の表面積を求めよ。
- (3) 座標平面上の曲線

$$C: x^2 + y^2 = 3 \quad (0 < x < \sqrt{2}, 1 < y < \sqrt{3})$$

の上の点 Q を考える。点 Q と同じ y 座標を持つ y 軸上の点を H とし、原点 O と点 Q を結ぶ線分 OQ が直線 $y = 1$ と交わる点を P とする。さらに点 $F(0, 1)$ をとる。四角形 PQHF を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の面のうち、線分 PQ が 1 回転してできる面の表面積を S とする。点 Q が曲線 C 上を動くとき S の最大値を求めよ。

第 2 問

座標平面上の動点 Q が以下の規則 (a)～(f) に従って 1 秒ごとに移動する。

- (a) 原点 $(0, 0)$ を出発点とし、まず点 $(1, 0)$ または点 $(0, 1)$ または点 $(0, -1)$ に、それぞれ確率 $\frac{1}{3}$ で移動する。
- (b) ある時刻に点 $(x-1, y)$ から点 (x, y) に移動したならば、その 1 秒後には点 $(x+1, y)$ または点 $(x, y+1)$ または点 $(x, y-1)$ に、それぞれ確率 $\frac{1}{3}$ で移動する。
- (c) ある時刻に点 $(x, 0)$ から点 $(x, 1)$ に移動したならば、その 1 秒後には点 $(x, 2)$ または点 $(x+1, 1)$ に、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で移動する。
- (d) ある時刻に点 $(x, 0)$ から点 $(x, -1)$ に移動したならば、その 1 秒後には点 $(x, -2)$ または点 $(x+1, -1)$ に、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で移動する。
- (e) ある時刻に点 $(x, 1)$ または点 $(x, -1)$ から点 $(x, 0)$ に移動したならば、その 1 秒後には点 $(x+1, 0)$ に移動する。
- (f) 直線 $y = 2$ 上の点または直線 $y = -2$ 上の点に達した場合には停止する。

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) n を正の整数とすると、 Q がある時刻に点 $(n-1, 0)$ に位置し、かつその 1 秒後に点 $(n, 0)$ に移動している確率を p_n とする。また Q がある時刻に点 $(n-1, 1)$ に位置し、かつその 1 秒後に点 $(n, 1)$ に移動している確率を p'_n とする。 p_1, p_2, p'_1, p'_2 を、それぞれ求めよ。
- (2) Q が直線 $x = 2$ 上の点に達する確率、および直線 $x = 3$ 上の点に達する確率をそれぞれ求めよ。
- (3) m を正の整数とすると、 Q が点 $(m, 0)$ に達する確率を m で表せ。

第 3 問

$ad - bc = 1$, $a > 0$ を満たす整数 a, b, c, d を考える。行列

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

が $NA = BM^{-1}$ を満たすとき、以下の各問いに答えよ。ただし、 M^{-1} は M の逆行列を表す。

- (1) $6a^2 + 20ac + 17c^2$ の値を求めよ。
- (2) $2a^2 + b^2$ の値を求めよ。
- (3) a, b, c, d の値を求めよ。
- (4) $6x^2 + 20xy + 17y^2 = 59$ を満たす実数 x, y に対して

$$\begin{cases} X = dx - by \\ Y = -cx + ay \end{cases}$$

とおくとき、 $X^2 + 2Y^2$ の値を求めよ。

- (5) $6x^2 + 20xy + 17y^2 = 59$ を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ。