

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（医学科）

対象年度：2005 年

試験時間：90 分

問題数：3 問

配点：120 点

第 1 問

以下の各問いに答えよ。

- (1) 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{7}{4}$$

$$a_n = \frac{5}{2}a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

- (2) 次のように定義される数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$$b_1 = 2, \quad b_2 = \frac{5}{2}, \quad b_3 = \frac{17}{4}$$

$$b_n = \frac{7}{2}b_{n-1} - \frac{7}{2}b_{n-2} + b_{n-3} \quad (n = 4, 5, 6, \dots)$$

第 2 問

座標平面上で次のように媒介変数表示される曲線 C を考える。

$$\begin{cases} x = \sin 2\theta \\ y = \sin 3\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) 曲線 C 上で $x > 0$ かつ $y > 0$ となる θ の範囲を求めよ。
- (2) 区間 $0 \leq \theta \leq \pi$ において $|x| = 1$ または $|y| = 1$ となる θ の値をすべて求めよ。
- (3) 次の 3 条件を満たす θ_1, θ_2 の値を求めよ。

$$0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi, \sin 2\theta_1 = \sin 2\theta_2 > 0, \sin 3\theta_1 = \sin 3\theta_2 > 0$$

- (4) 曲線 C が自分自身と交わる点の個数を求めよ。

第 3 問

次の条件 (i), (ii), (iii) を満たす関数 $f(x)$ ($x > 0$) を考える。

(i) $f(1) = 0$

(ii) 導関数 $f'(x)$ が存在し, $f'(x) > 0$ ($x > 0$)。

(iii) 第 2 次導関数 $f''(x)$ が存在し, $f''(x) < 0$ ($x > 0$)。

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $a \geq \frac{3}{2}$ のとき次の 3 数の大小を比較せよ。

$$f(a), \quad \frac{1}{2} \left\{ f\left(a - \frac{1}{2}\right) + f\left(a + \frac{1}{2}\right) \right\}, \quad \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f(x) dx$$

(2) 整数 n ($n \geq 2$) に対して次の不等式が成立することを示せ。

$$\int_{\frac{3}{2}}^n f(x) dx < \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2} f(n) < \int_1^n f(x) dx$$

(3) 次の極限值を求めよ。ただし $\log$ は自然対数を表す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \log n! - \log n^n}{\log n}$$