

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（医学科）

対象年度：2004年

試験時間：90分

問題数：3問

配点：120点

第 1 問

次の条件 (A), (B) を満たす関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を考える。

(A) $f_n(x)$ は x の n 次式で表される。

(B) 任意の実数 θ に対して次式が成立する。

$$f_n(2 \cos \theta) \sin \theta = \sin(n+1)\theta$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $f_1(x)$, $f_2(x)$ を求めよ。

(2) 次の極限值を求めよ。ただし k は正の定数とする。

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin k\theta}{\sin \theta}$$

(3) $f_n(2)$ を求めよ。

(4) 整式 $f_n(x)$ を $x^2 - 3x + 2$ で割ったときの余りが $ax - 25$ のとき, 次数 n および定数 a を求めよ。

第 2 問

関数 $g(x)$ および $f_k(x)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) を次のように定義する。

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{3}x & (|x| \leq 2 \text{ のとき}) \\ x & (|x| > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$f_k(x) = g(x - k) + k$$

正の整数 k, l に対し、整数の組を要素とする集合 S_k および $T_{k,l}$ を次のように定義する。

$$S_k = \{ (m, n) \mid m, n \text{ は整数, } m \neq n, f_k(m) = n \}$$

$$T_{k,l} = \{ (m, n) \mid m, n \text{ は整数, } m \neq n, f_l(f_k(m)) = n \}$$

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $S_k = \{ (k-1, k+1), (k+1, k-1) \}$ となることを示せ。
- (2) $T_{3,4}$ を求めよ。
- (3) $T_{3,k} \cap S_3 \cup S_k$ を満たす整数 k をすべて求めよ。
- (4) $T_{3,k} \cap T_{k,3}$ を満たす整数 k をすべて求めよ。

第 3 問

座標平面上に次の 5 点をとる。ただし a は正の定数とする。

$$A(1, 0), \quad B(-1, 0), \quad C(1, a), \quad D(-1, a), \quad M(0, a)$$

原点を O とするとき、以下の各問いに答えよ。

- (1) 線分 CD 上の任意の点 P に対して次の不等式が成立することを示せ。

$$AP + BP \geq AM + BM$$

- (2) 点 P が線分 OM 上を動くとき、 $AP + BP + MP$ の最小値を求めよ。

- (3) $a = 2$ とする。点 P, Q が四角形 $ACDB$ の内部（辺を含む）を動くとき、 $AP + BP + PQ + CQ + DQ$ の最小値を求めよ。