

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（医学科）

対象年度：2001 年

試験時間：90 分

問題数：3 問

配点：120 点

第 1 問

以下の各問いに答えよ。ただし π は円周率を表す。

- (1) 複素数 z が $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ を満たすとき

$$(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3)(1 - z^4)$$

の値を求めよ。

- (2) 絶対値 1, 偏角 2θ ($0 \leq \theta < \pi$) の複素数 ω に対して $r = |1 - \omega|$ とおくとき, $\sin \theta$ を r を用いて表せ。

- (3) $\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5}$ の値を求めよ。

第 2 問

以下の各問いに答えよ。

- (1) 座標平面上で 3 点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ を頂点にもつ正方形を考える。実数 t ($0 \leq t \leq 2$) に対して, 2 点 $P(t, 0)$, $Q(0, t)$ を通る直線とこの正方形が交わってできる線分の長さを $L(t)$ とする。このとき, 関数 $L(t)$ のグラフを描き, 定積分 $\int_0^2 L(t) dt$ の値を求めよ。
- (2) 座標空間において 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を頂点にもつ立方体を考える。実数 t ($0 \leq t \leq 3$) に対して, 3 点 $P(t, 0, 0)$, $Q(0, t, 0)$, $R(0, 0, t)$ を通る平面によるこの立方体の切り口の面積を $S(t)$ とする。このとき, 関数 $S(t)$ の最大値を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_0^3 S(t) dt$ の値を求めよ。

第 3 問

数の集合 A に関する以下の諸条件を考える。ただし n, k は $n \geq k \geq 0$ を満たす整数とし, x, y は任意の数とする。

条件 Z : x が A の要素ならば x は整数。

条件 P_n : x が A の要素ならば $1 \leq x$ かつ $x \leq n$ 。

条件 Q_k : A はちょうど k 個の要素からなる。

条件 R : x, y が A の要素ならば $x - y + 1 \in 0$ 。

条件 $S_{n,k}$: A は 3 条件 Z, P_n, Q_k を満たす。

条件 $T_{n,k}$: A は条件 $S_{n,k}$ および条件 R を満たす。

条件 $S_{n,k}$ を満たすような集合 A の個数を $f(n, k)$ と表し, 条件 $T_{n,k}$ を満たすような集合 A の個数を $g(n, k)$ と表す。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $f(n, 0)$ および $f(n, n)$ を求めよ。また, $n > k \geq 1$ のとき $f(n, k)$ を $f(n-1, k)$ と $f(n-1, k-1)$ を用いて表せ。
- (2) $n > k \geq 1$ のとき $g(n, k)$ を $g(n-1, k)$ と $g(n-2, k-1)$ を用いて表せ。
- (3) $m \geq 1, \ell \geq 0$ なる整数 m, ℓ に対して整数 $h(m, \ell)$ を

$$h(m, \ell) = g(m + \ell - 1, \ell)$$

で定義する。このとき $h(m, 0)$ および $h(m, m)$ を求めよ。また, $m > \ell \geq 1$ のとき $h(m, \ell)$ を $h(m-1, \ell)$ と $h(m-1, \ell-1)$ を用いて表せ。

- (4) $g(12, 4)$ を求めよ。