

r を正の実数とするとき、以下の各問いに答えよ。

- (1) $0 \leq c < r$ を満たす実数 c に対して、 xy 平面において連立不等式

$$(*) \quad \begin{cases} x^2 + (y - c)^2 \leq r^2 \\ x^2 + (y + c)^2 \leq r^2 \end{cases}$$

が表す領域の面積 S を、 $\cos \theta = \frac{c}{r}$ となる θ $\left(0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と r を用いて表せ。

- (2) $-r < c \leq 0$ を満たす実数 c に対して、 xy 平面において連立不等式 $(*)$ が表す領域の面積 S を、 $\cos \theta = \frac{c}{r}$ となる θ $\left(\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi\right)$ と r を用いて表せ。

- (3) a を正の実数とする。 xyz 空間において、平面 $x = 0$ 上に放物線 $C : z = ay^2$ をとる。いま、 $t \geq 0$ を満たす実数 t に対して、 $s \geq 0$ であるような C 上の点 $(0, s, t)$ をとる。これに対して、以下を満たすような実数 $f(t)$ 、 $g(t)$ および領域 D_1 、 D_2 を定める。

- 平面 $z = t$ 上の領域 $D_1 : x^2 + (y - f(t))^2 \leq r^2$ における y 座標の最小値は $-s$ である。
- 平面 $z = t$ 上の領域 $D_2 : x^2 + (y - g(t))^2 \leq r^2$ における y 座標の最大値は s である。

xyz 空間において、 $t \geq 0$ の範囲で t を動かしたときに D_1 と D_2 の共通部分が通過する部分の体積 V を a 、 r を用いて表せ。

- (4) (3) について、 $a + r = 1$ のとき、 V を最大とする a 、 r の値を求めよ。