

関数 $f(x)$ を $x \geq 0$ に対して $f(x) = x \log(1+x)$ と定める.

(1) 不定積分 $\int x \log(1+x) dx$ を求めよ.

(2) $y = f(x)$ ($x \geq 0$) の逆関数を $y = g(x)$ ($x \geq 0$) とする. また a, b を $g(a) = 1$, $g(b) = 2$ となる実数とする. このとき定積分

$$I = \int_a^b g(x) dx$$

の値を求めよ.

(3) 関数 $P(x)$ を $x \geq 0$ に対して $P(x) = \int_0^x \sqrt{1+f(t)} dt$ と定める. このとき $y = P(x)$ について, 定義域を $x \geq 0$ とする逆関数 $y = Q(x)$ が微分可能であることは証明なしに認めてよい. 関数 $R(x)$ を $x \geq 0$ に対して

$$R(x) = \int_0^{P(x)} \frac{1}{Q'(v)} dv$$

と定めるとき, $R(x)$ を求めよ.