

xy 平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(2, 4)$, $B(3, 7)$ をとる。さらに,

$$\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$$

となる整数 m, n が存在するような xy 平面上の点 P 全体の集合を L とする。このとき, 以下の各問いに答えよ。

(1) $P_1(1, 1)$, $P_2(2, 1)$, $P_3(3, 1)$ は L に属するか。それぞれ判定せよ。

(2) L に属する点のうち, x 軸上にあるものをすべて求めよ。

(3) 2 点 A' , B' を L の要素とする。 L の任意の要素 P に対して,

$$\overrightarrow{OP} = m'\overrightarrow{OA'} + n'\overrightarrow{OB'}$$

となる整数 m', n' が存在するとき, $|\overrightarrow{OA'}| + |\overrightarrow{OB'}|$ の最小値を求めよ。

(4) 任意の L の要素 P に対して, 内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ が整数となるような xy 平面上の点 Q 全体の集合を M とする。 M の要素のうち, x 座標および y 座標の絶対値がともに 1 以下であるものをすべて求めよ。