

20 個の合同な正三角形の面を持ち、各頂点に 5 つの面が集まるへこみのない多面体を、正二十面体という。各面に 20 種類の異なる目が 1 つずつ与えられており、すべての目が等しい確率で出る正二十面体のサイコロを I とする。 I の 2 つの面 A, B に対し、 I の表面上を、 A の内部の点から B の内部の点へ、 I の頂点を通らずに移動するとき、横切る I の辺の本数の最小値を $d(A, B)$ とする。たとえば、 A と B が 1 辺を共有しているとき、 $d(A, B) = 1$ となる。また、 I の任意の面 A に対し、 $d(A, A) = 0$ とする。さらに、 I を n 回投げたとき、 i 回目に出た目に対応する面を F_i とし、 $n \geq 2$ のとき、 $d(F_i, F_j)$ ($1 \leq i < j \leq n$) の最大値を M 、最小値を m とする。このとき、以下の各問いに答えよ。

- (1) xyz 空間において、 I の 1 つの面と xy 平面が平行となるように I を配置したとき、 I の頂点または辺上の点を通り z 軸に平行な直線と xy 平面の交点全体の集合がなす図形を I' とする。 I' の概形を描け。ただし、 I' における線分どうしの長さの比やなす角の角度は正確でなくてもよい。
- (2) $n = 2$ のとき、0 以上の整数 k に対し、 $d(F_1, F_2) = k$ となる確率を P_k とする。 $P_k > 0$ となるすべての k に対して、それぞれ P_k を求めよ。
- (3) $n = 3$ のとき、 $M \geq 3$ となる確率を求めよ。
- (4) $n \geq 3$ のとき、 $m \geq 3$ となる確率を求めよ。
- (5) $n \geq 10$ のとき、 $1 \leq m \leq M \leq 4$ となる確率を求めよ。