

実数全体を定義域にもつ微分可能な関数 $f(t)$, $g(t)$ が次の 6 つの条件を満たしているとする.

$$f'(t) = -f(t)g(t), \quad g'(t) = \{f(t)\}^2,$$

$$f(t) > 0, \quad |g(t)| < 1, \quad f(0) = 1, \quad g(0) = 0$$

このとき,

$$p(t) = \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2, \quad q(t) = \log \frac{1 + g(t)}{1 - g(t)}$$

とおく.

- (1) $p'(t)$ を求めよ.
- (2) $q'(t)$ は定数関数であることを示せ.
- (3) $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ を求めよ.
- (4) $f(T) = g(T)$ となる正の実数 T に対して, 媒介変数表示された平面曲線 $(x, y) = (f(t), g(t))$ ($0 \leq t \leq T$) の長さを求めよ.