

a は $0 < a \leq \frac{\pi}{4}$ を満たす実数とし、 $f(x) = \frac{4}{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - ax\right)$ とする。
このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 次の等式 (*) を満たす a がただ 1 つ存在することを示せ。

$$(*) \quad \int_0^1 f(x) dx = 1$$

- (2) $0 \leq b < c \leq 1$ を満たす実数 b, c について、不等式

$$f(b)(c-b) \leq \int_b^c f(x) dx \leq f(c)(c-b)$$

が成り立つことを示せ。

- (3) 次の試行を考える。

[試行] n 個の数 $1, 2, \dots, n$ を出目とする、あるルーレットを k 回まわす。

この [試行] において、各 $i = 1, 2, \dots, n$ について i が出た回数を $S_{n,k,i}$ とし、

$$(**) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{n,k,i}}{k} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx$$

が成り立つとする。このとき、(1) の等式 (*) が成り立つことを示せ。

- (4) (3) の [試行] において出た数の平均値を $A_{n,k}$ とし、 $A_n = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{n,k}$ とする。

(**) が成り立つとき、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n}$ を a を用いて表せ。