

曲線 $C: y = f(x)$ ($0 \leq x < 1$) が次の条件を満たすとする。

- $f(0) = 0$
- $0 < x < 1$ のとき $f'(x) > 0$
- $0 < a < 1$ を満たすすべての実数 a について、曲線 C 上の点 $P(a, f(a))$ における接線と直線 $x = 1$ との交点を Q とするとき、 $PQ = 1$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)f'(x) dx$ の値を求めよ。

(3) 曲線 C と x 軸，直線 $x = 1$ ，直線 $y = f\left(\frac{1}{2}\right)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。