

東京科学大学（理工学系） 2021 年 第 4 問

S を、座標空間内の原点 O を中心とする半径 1 の球面とする． S 上を動く点 A, B, C, D に対して

$$F = 2(AB^2 + BC^2 + CA^2) - 3(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

- (1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ とするとき, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ によらない定数 k によって

$$F = k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{d})$$

と書けることを示し, 定数 k を求めよ．

- (2) 点 A, B, C, D が球面 S 上を動くときの, F の最大値 M を求めよ．

- (3) 点 C の座標が $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, 0\right)$, 点 D の座標が $(1, 0, 0)$ であるとき, $F = M$ となる S 上の点 A, B の組をすべて求めよ．