

a と b を実数として, xy 平面において, 2 つの曲線

$$C_1 : y = x^4 - x^2$$

$$C_2 : y = a(x^2 - 1)$$

および直線

$$\ell : y = b$$

を考える。ただし C_1 と ℓ は相異なる 4 点で交わるとする。また, C_1 と C_2 は $0 < x_0 < 1$ となる交点 $P(x_0, y_0)$ をひとつもつとする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) a のとりうる値の範囲を求めよ。また x_0, y_0 を a を用いて表せ。
- (2) b のとりうる値の範囲を求めよ。また C_1 と ℓ の交点の x 座標を b を用いて表せ。
- (3) C_1 と ℓ で囲まれる領域のうち, $y \leq b$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とする。 V_1 を b を用いて表せ。
- (4) $b = y_0$ として, C_2 と ℓ で囲まれる領域のうち, $y \leq y_0$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。 $3V_1 = V_2$ のとき, a の値を求めよ。