

n を 2 以上の自然数とし，ひとつのサイコロを n 回くり返し投げるとする。 n 以下の自然数 k について， k 回目に 1 から 4 の目が出たら $a_k = 1$ ，5 または 6 の目が出たら $a_k = 0$ として，数列 $\{a_k\}$ を定義する。さらに数列 $\{b_k\}$ を， $b_1 = 0$ ，2 以上 n 以下の自然数 k について $b_k = (a_k + a_{k-1})(2 - a_k - a_{k-1})$ と定義する。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) k を 2 以上 n 以下の自然数とする。 $b_k = 0$ となる確率を求めよ。

(2) $b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 1$ となる確率を n を用いて表せ。

(3) n が 5 以上のとき， $S_n = \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{2^2} + \cdots + \frac{b_n}{2^{n-1}}$ とおく。このとき $\frac{5}{8} \leq S_n < \frac{15}{16}$ となる確率を求めよ。