

0 以上の整数 x, y に対して, $R(x, y)$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} xy = 0 \text{ のとき, } R(x, y) = 0 \\ xy \neq 0 \text{ のとき, } x \text{ を } y \text{ で割った余りを } R(x, y) \text{ とする} \end{cases}$$

正の整数 a, b に対して, 数列 $\{r_n\}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} r_1 &= R(a, b), \quad r_2 = R(b, r_1), \\ r_{n+1} &= R(r_{n-1}, r_n) \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \end{aligned}$$

また, $r_n = 0$ となる最小の n を N で表す。例えば $a = 7, b = 5$ のとき $N = 3$ である。
次に, 数列 $\{f_n\}$ を次のように定義する。

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $a = f_{102}, b = f_{100}$ のとき, N を求めよ。
- (2) 正の整数 a, b について, a が b で割り切れないとき, $r_1 \geq f_N$ が成立することを示せ。
- (3) 2 以上の整数 n について, $10f_n < f_{n+5}$ が成立することを示せ。
- (4) 正の整数 a, b について, a が b で割り切れないとき,

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{r_k} < \frac{259}{108}$$

が成立することを示せ。