

xyz 空間において連立不等式

$$|x| \leq 1, \quad |y| \leq 1, \quad |z| \leq 1$$

の表す領域を Q とし、正の実数 r に対して $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ の表す領域を S とする。また、 Q と S のいずれか一方のみに含まれる点全体がなす領域を R とし、 R の体積を $V(r)$ とする。さらに

$x \geq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_x

$y \geq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_y

$z \geq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_z

とし、

$S_x \neq \emptyset$ を満たす r の最小値を r_1

$S_x \cap S_y \neq \emptyset$ を満たす r の最小値を r_2

$S_x \cap S_y \cap S_z \neq \emptyset$ を満たす r の最小値を r_3

とする。ただし、 $\emptyset$ は空集合を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $r = \frac{\sqrt{10}}{3}$ のとき、 R の xy 平面による断面を図示せよ。
- (2) r_1, r_2, r_3 および $V(r_1), V(r_3)$ を求めよ。
- (3) $r \geq r_1$ のとき、 S_x の体積を r を用いて表せ。
- (4) $0 < r \leq r_2$ において、 $V(r)$ が最小となる r の値を求めよ。