

東京科学大学（医学科） 2014 年 第 1 問

自然数 n に対し、3 個の数字 1, 2, 3 から重複を許して n 個並べたもの $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の全体の集合を S_n とおく。 S_n の要素 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対し、次の 2 つの条件を考える。

条件 C_{12} : $1 \leq i < j \leq n$ である整数 i, j の組で、 $x_i = 1, x_j = 2$ を満たすものが少なくとも 1 つ存在する。

条件 C_{123} : $1 \leq i < j < k \leq n$ である整数 i, j, k の組で、 $x_i = 1, x_j = 2, x_k = 3$ を満たすものが少なくとも 1 つ存在する。

例えば、 S_4 の要素 $(3, 1, 2, 2)$ は条件 C_{12} を満たすが、条件 C_{123} は満たさない。

S_n の要素 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ のうち、条件 C_{12} を満たさないものの個数を $f(n)$ 、条件 C_{123} を満たさないものの個数を $g(n)$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $f(4)$ と $g(4)$ を求めよ。
- (2) $f(n)$ を n を用いて表せ。
- (3) $g(n+1)$ を $g(n)$ と $f(n)$ を用いて表せ。
- (4) $g(n)$ を n を用いて表せ。