

m, n を自然数として、関数 $f(x) = x^m(1-x)^n$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値を m, n を用いて表せ。

(2) 定積分 $\int_0^1 f(x) dx$ を m, n を用いて表せ。

(3) a, b, c を実数として、関数 $g(x) = ax^2 + bx + c$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値を $M(a, b, c)$ とする。次の 2 条件 (i), (ii) が成立するとき、 $M(a, b, c)$ の最小値を m, n を用いて表せ。

(i) $g(0) = g(1) = 0$

(ii) $0 < x < 1$ のとき $f(x) \leq g(x)$

(4) m, n が 2 以上の自然数で $m > n$ であるとき

$$\frac{(m+n+1)!}{m!n!} > \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} > 2^{2n-1}$$

が成立することを示せ。