

関数 $f(x) = x^3 - x^2 + x$ について、以下の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$ はつねに増加する関数であることを示せ。

(2) $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とおく。 $x > 0$ について

$$\sqrt[3]{x} - 1 < g(x) < \sqrt[3]{x} + 1$$

が成立することを示せ。

(3) $b > a > 0$ について

$$0 < \int_a^b \frac{1}{x^2 + 1} dx < \frac{1}{a}$$

が成立することを示せ。

(4) 自然数 n について、(2) で定義された $g(x)$ を用いて

$$A_n = \int_n^{2n} \frac{1}{\{g(x)\}^3 + g(x)} dx$$

とおくとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ を求めよ。