

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} a_1 = 5, & b_1 = 3, \\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また、自然数 n について $c_n = a_n^2 - b_n^2$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) c_n を n を用いて表せ。
- (2) k を自然数とするととき、自然数 ℓ について

$$a_{k+\ell} = a_k a_\ell + b_k b_\ell, \quad b_{k+\ell} = b_k a_\ell + a_k b_\ell$$

が成立することを、 ℓ に関する数学的帰納法によって示せ。

- (3) $n > \ell$ となる自然数 n, ℓ について

$$b_{n+\ell} - c_\ell b_{n-\ell} = 2a_n b_\ell$$

が成立することを示せ。

- (4) 2 以上の自然数 n について

$$a_{2n} + \sum_{m=1}^{n-1} c_{n-m} a_{2m} = \frac{b_{2n+1}}{2b_1} - \frac{c_n}{2}$$

が成立することを示せ。