

正の実数 a, b, c を係数とする 2 次式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ に関して、次の条件 C を考える。

条件 C : 3 で割り切れないすべての整数 x について $f(x)$ が整数となる。

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ が条件 C を満たすとき、 $g(x) = f(x+3) - f(x)$ は係数および定数項が整数となる 1 次式であることを示せ。
- (2) 条件 C を満たす $f(x)$ のうち、 $f(1) = 1$ となるものを求めよ。
- (3) 以下の条件 C' が条件 C と同値となるような自然数の組 (m_1, m_2, m_3) のうち、 $m_1 + m_2 + m_3$ が最小となるものを求めよ。

条件 C' : $m_1b, m_2a + m_3b, a + b + c$ がいずれも整数となる。

- (4) n を自然数とする。条件 C を満たす $f(x)$ のうち、 $f(1) = n$ となるものの個数を n を用いて表せ。