

以下の各問いに答えよ。ただし t は $0 < t < \pi$ を満たす実数とする。

(1) 次の等式を証明せよ。

$$\left(\cos \frac{t}{2}\right) \left(\cos \frac{t}{4}\right) \left(\cos \frac{t}{8}\right) = \frac{\sin t}{8 \sin \frac{t}{8}}$$

(2) 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を t を用いて表せ。

$$a_1 = \cos \frac{t}{2}, \quad a_n = a_{n-1} \left(\cos \frac{t}{2^n} \right) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

(3) 数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を次のように定義する。

$$b_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad b_n = \sqrt{\frac{1 + b_{n-1}}{2}} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad c_n = c_{n-1} b_n \quad (n = 2, 3, \dots)$$

このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ を求めよ。