

四面体  $OABC$  において、ベクトル  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  は互いに垂直であるとする。点  $O$  から三角形  $ABC$  を含む平面に垂線  $\ell$  を引き、その平面と  $\ell$  との交点を  $H$  とする。このとき

(1)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$  を示せ。

さらに  $AC = 2$ ,  $BC = 3$  とする。また 2 点  $A$ ,  $H$  を通る直線と辺  $BC$  との交点を  $D$  とするとき、点  $H$  は線分  $AD$  を  $2:1$  の比に内分しているとする。このとき以下の各問に答えよ。

(2)  $\overrightarrow{CH} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}$  となる定数  $\alpha$ ,  $\beta$  を求めよ。

(3) 辺  $AB$  の長さを求めよ。

(4) 四面体  $OABC$  の体積を求めよ。