

e を自然対数の底とし、数列 $\{a_n\}$ を次式で定義する。

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) $n \geq 3$ のとき、次の漸化式を示せ。

$$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$$

(2) $n \geq 1$ に対し $a_n > a_{n+1} > 0$ なることを示せ。

(3) $n \geq 2$ のとき、以下の不等式が成立することを示せ。

$$a_{2n} < \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdots (2n)}(e-2)$$