

次の条件 (i), (ii), (iii) を満たす関数 $f(x)$ ($x > 0$) を考える。

(i) $f(1) = 0$

(ii) 導関数 $f'(x)$ が存在し, $f'(x) > 0$ ($x > 0$)。

(iii) 第 2 次導関数 $f''(x)$ が存在し, $f''(x) < 0$ ($x > 0$)。

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $a \geq \frac{3}{2}$ のとき次の 3 数の大小を比較せよ。

$$f(a), \quad \frac{1}{2} \left\{ f\left(a - \frac{1}{2}\right) + f\left(a + \frac{1}{2}\right) \right\}, \quad \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f(x) dx$$

(2) 整数 n ($n \geq 2$) に対して次の不等式が成立することを示せ。

$$\int_{\frac{3}{2}}^n f(x) dx < \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2} f(n) < \int_1^n f(x) dx$$

(3) 次の極限値を求めよ。ただし $\log$ は自然対数を表す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \log n! - \log n^n}{\log n}$$