

次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$, $g(x)$ を連続な偶関数, m を正の整数とするととき,

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x) dx = m \int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x) dx$$

を証明せよ。

- (2) 正の整数 m , n が $m\pi \leq n < (m+1)\pi$ を満たしているとき,

$$\begin{aligned} \frac{m}{(m+1)\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx &\leq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2} dx \\ &\leq \frac{m+1}{m\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx \end{aligned}$$

を証明せよ。

- (3) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2} dx$$

を求めよ。