

M を逆行列を持つ 2 次の正方行列とする。数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定義し, (x_n, y_n) を座標とする平面上の点を P_n とする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) P_1 が P_0 と異なるとき, すべての自然数 n に対して P_n は P_{n-1} と異なることを示せ。
- (2) 定数 θ を用いて $(x_1, y_1) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $(x_2, y_2) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ と表されているとき, すべての自然数 n に対して

$$(x_n, y_n) = (\cos n\theta, \sin n\theta)$$

となることを示せ。

- (3) $A(1, 0)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とし, C, D, E, F をそれぞれ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, & \overrightarrow{OD} &= -\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OE} &= -\overrightarrow{OB}, & \overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

を満たす点とする。ここで O は原点を表す。以下の条件 (a), (b), (c) がすべて成立しているとき, 行列 M を求めよ。

- (a) すべての自然数 n に対して, P_n は A, B, C, D, E, F のいずれかと一致する。
- (b) P_1 は B と一致する。
- (c) P_6 は A とは異なる。