

数の集合 A に関する以下の諸条件を考える。ただし n, k は $n \geq k \geq 0$ を満たす整数とし、 x, y は任意の数とする。

条件 Z : x が A の要素ならば x は整数。

条件 P_n : x が A の要素ならば $1 \leq x$ かつ $x \leq n$ 。

条件 Q_k : A はちょうど k 個の要素からなる。

条件 R : x, y が A の要素ならば $x - y + 1 \in 0$ 。

条件 $S_{n,k}$: A は 3 条件 Z, P_n, Q_k を満たす。

条件 $T_{n,k}$: A は条件 $S_{n,k}$ および条件 R を満たす。

条件 $S_{n,k}$ を満たすような集合 A の個数を $f(n, k)$ と表し、条件 $T_{n,k}$ を満たすような集合 A の個数を $g(n, k)$ と表す。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $f(n, 0)$ および $f(n, n)$ を求めよ。また、 $n > k \geq 1$ のとき $f(n, k)$ を $f(n-1, k)$ と $f(n-1, k-1)$ を用いて表せ。
- (2) $n > k \geq 1$ のとき $g(n, k)$ を $g(n-1, k)$ と $g(n-2, k-1)$ を用いて表せ。
- (3) $m \geq 1, \ell \geq 0$ なる整数 m, ℓ に対して整数 $h(m, \ell)$ を

$$h(m, \ell) = g(m + \ell - 1, \ell)$$

で定義する。このとき $h(m, 0)$ および $h(m, m)$ を求めよ。また、 $m > \ell \geq 1$ のとき $h(m, \ell)$ を $h(m-1, \ell)$ と $h(m-1, \ell-1)$ を用いて表せ。

- (4) $g(12, 4)$ を求めよ。