

入学試験過去問題
数 学

大阪大学（理系）

対象年度：2025年

試験時間：150分

問題数：5問

第 1 問

平面上の三角形 OAB を考える. $\angle AOB$ は鋭角, $OA = 3$, $OB = t$ とする. また, 点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし, $OC = 1$ とする. 線分 AB を $2:1$ に内分する点を P , 点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする.

- (1) 内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ を t を用いて表せ.
- (2) 線分 OR の長さを t を用いて表せ.
- (3) 線分 OB の中点を M とする. 点 R が線分 MB 上にあるとき, t のとりうる値の範囲を求めよ.

第 2 問

p と m を実数とし、関数 $f(x) = x^3 + 3px^2 + 3mx$ は $x = \alpha$ で極大値をとり、 $x = \beta$ で極小値をとるとする。

- (1) $f(\alpha) - f(\beta)$ を p と m を用いて表せ.
- (2) p と m が $f(\alpha) - f(\beta) = 4$ を満たしながら動くとき、曲線 $y = f(x)$ の変曲点の軌跡を求めよ.

第 3 問

座標空間に 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 1, 1)$, $P(x, y, 0)$ がある. $\angle OAP = 30^\circ$ かつ $y \geq 0$ を満たすように点 P が動くとき, $(x+1)(y+1)$ の最大値と最小値を求めよ.

第 4 問

次の問いに答えよ.

- (1) $t > 0$ のとき

$$-\frac{1}{t} < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx < \frac{1}{t}$$

が成り立つことを示せ.

- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx = 0$ を示せ.

- (3) $f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ とおく.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx$$

を示せ.

第 5 問

投げたときに表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインがある. A, B, C の 3 文字を BAC のように 1 個ずつすべて並べて得られる文字列に対して, コインを投げて次の操作を行う.

- 表が出たら文字列の左から 1 文字目と 2 文字目を入れかえる.
- 裏が出たら文字列の左から 2 文字目と 3 文字目を入れかえる.

例えば, 文字列が BAC であるときに, 2 回続けてコインを投げて表, 裏の順に出たとすると, 文字列は BAC から ABC を経て ACB となる.

最初の文字列は ABC であるとする. コインを n 回続けて投げたあとの文字列が ABC である確率を p_n とし, BCA である確率を q_n とする.

- (1) k を正の整数とするとき, $p_{2k} - q_{2k}$ を求めよ.
- (2) n を正の整数とするとき, p_n を求めよ.