# 入 学 試 験 過 去 問 題

# 数　学

## 大阪大学（理系）

対象年度： 2025 年

試験時間： 150 分

問題数： 5 問

（下 書 き 用 紙）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{1}$　平面上の三角形 OAB を考える．$\angle$AOB は鋭角，OA $= 3$，OB $= t$ とする．また，点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし，OC $= 1$ とする．線分 AB を $2:1$ に内分する点を P，点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $t$ を用いて表せ．

(2) 線分 OR の長さを $t$ を用いて表せ．

(3) 線分 OB の中点を M とする．点 R が線分 MB 上にあるとき，$t$ のとりうる値の範囲を求めよ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{2}$　$p$ と $m$ を実数とし，関数 $f(x) = x^3 + 3px^2 + 3mx$ は $x = \alpha$ で極大値をとり，$x = \beta$ で極小値をとるとする．

(1)　$f(\alpha) - f(\beta)$ を $p$ と $m$ を用いて表せ．

(2)　$p$ と $m$ が $f(\alpha) - f(\beta) = 4$ を満たしながら動くとき，曲線 $y = f(x)$ の変曲点の軌跡を求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{3}$　座標空間に 3 点 O $(0,\ 0,\ 0)$，A $(0,\ 1,\ 1)$，P $(x,\ y,\ 0)$ がある．$\angle\mathrm{OAP} = 30^\circ$ かつ $y \geqq 0$ を満たすように点 P が動くとき，$(x+1)(y+1)$ の最大値と最小値を求めよ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{4}$　次の問いに答えよ．

(1) $t > 0$ のとき

$$-\frac{1}{t} < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2}\,dx < \frac{1}{t}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle \lim_{t\to\infty} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x}\,dx = 0$ を示せ．

(3) $f(x) = \sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく．

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{2} \frac{\cos x}{x}\,dx$$

を示せ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{5}$　投げたときに表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインがある．A，B，C の 3 文字を BAC のように 1 個ずつすべて並べて得られる文字列に対して，コインを投げて次の操作を行う．

- 表が出たら文字列の左から 1 文字目と 2 文字目を入れかえる．
- 裏が出たら文字列の左から 2 文字目と 3 文字目を入れかえる．

例えば，文字列が BAC であるときに，2 回続けてコインを投げて表，裏の順に出たとすると，文字列は BAC から ABC を経て ACB となる．

最初の文字列は ABC であるとする．コインを $n$ 回続けて投げたあとの文字列が ABC である確率を $p_n$ とし，BCA である確率を $q_n$ とする．

(1)　$k$ を正の整数とするとき，$p_{2k} - q_{2k}$ を求めよ．

(2)　$n$ を正の整数とするとき，$p_n$ を求めよ．

（配点率 20 %）