入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

大阪大学（理系）

対象年度： 2024年

試験時間： 150分

問題数： 5問

（下 書 き 用 紙）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{1}$　自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos\frac{x}{3} \quad (x \geqq 0)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底である．

(1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は，ただ 1 つの実数解をもつことを示せ．

(2) (1) における実数解を a_n とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{2}$　α，β を複素数とし，複素数 z に対して

$$f(z) = z^2 + \alpha z + \beta$$

とおく．α，β は

$$|\,f(1) - 3\,| \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad |\,f(i) - 1\,| \leqq 3$$

を満たしながら動く．ただし，i は虚数単位である．

(1)　$f(1+i)$ がとりうる値の範囲を求め，複素数平面上に図示せよ．

(2)　$f(1+i) = 0$ であるとき，α，β の値を求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{3}$　空間内の 2 直線 ℓ，m はねじれの位置にあるとする．ℓ と m の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{4}$ $a > 1$ とする．xy 平面において，点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする．

(1) 円 C の $x \geqq a$ の部分と y 軸および 2 直線 $y = 1$，$y = -1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(2) 円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする．(1) における V_1 について，$V_1 = 2V_2$ となる a の値を求めよ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{5}$ 自然数 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ のうち，n と互いに素であるものの個数を $f(n)$ とする．

(1) 自然数 a，b，c および相異なる素数 p，q，r に対して，等式

$$f(p^a q^b r^c) = p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} (p-1)(q-1)(r-1)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(n)$ が n の約数となる 5 以上 100 以下の自然数 n をすべて求めよ．

（配点率 20 %）