

入学試験過去問題
数 学

大阪大学（理系）

対象年度：2023年

試験時間：150分

問題数：5問

第 1 問

n を 2 以上の自然数とする.

(1) $0 \leq x \leq 1$ のとき, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2}x^n \leq (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき, 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n(a_n - \log 2)$$

第 2 問

平面上の 3 点 O, A, B が

$$|2\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OA} + 2\vec{OB}| = 1 \quad \text{かつ} \quad (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする.

(1) $(2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + 2\vec{OB})$ を求めよ.

(2) 平面上の点 P が

$$|\vec{OP} - (\vec{OA} + \vec{OB})| \leq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \vec{OP} \cdot (2\vec{OA} + \vec{OB}) \leq \frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき, $|\vec{OP}|$ の最大値と最小値を求めよ.

第 3 問

P を座標平面上の点とし、点 P の座標を (a, b) とする。 $-\pi \leq t \leq \pi$ の範囲にある実数 t のうち、曲線 $y = \cos x$ 上の点 $(t, \cos t)$ における接線が点 P を通るという条件をみたすものの個数を $N(P)$ とする。 $N(P) = 4$ かつ $0 < a < \pi$ をみたすような点 P の存在範囲を座標平面上に図示せよ。

第 4 問

a, b を $a^2 + b^2 > 1$ かつ $b \neq 0$ をみたす実数の定数とする. 座標空間の点 $A(a, 0, b)$ と点 $P(x, y, 0)$ をとる. 点 $O(0, 0, 0)$ を通り直線 AP と垂直な平面を α とし, 平面 α と直線 AP との交点を Q とする.

- (1) $(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO})^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{AQ}|^2$ が成り立つことを示せ.
- (2) $|\overrightarrow{OQ}| = 1$ をみたすように点 $P(x, y, 0)$ が xy 平面上を動くとき, 点 P の軌跡を求めよ.

第 5 問

1 個のさいころを n 回投げて、 k 回目に出た目を a_k とする. b_n を

$$b_n = \sum_{k=1}^n a_1^{n-k} a_k$$

により定義し、 b_n が 7 の倍数となる確率を p_n とする.

- (1) p_1, p_2 を求めよ.
- (2) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ.