入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

大阪大学（理系）

対象年度： 2022年

試験時間： 150分

問題数： 5問

（下 書 き 用 紙）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{1}$ r を正の実数とする．複素数平面上で，点 z が点 $\dfrac{3}{2}$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき，

$$z + w = zw$$

を満たす点 w が描く図形を求めよ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{2}$ $\alpha = \dfrac{2\pi}{7}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\cos 4\alpha = \cos 3\alpha$ であることを示せ．

(2) $f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ とするとき，$f(\cos\alpha) = 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $\cos\alpha$ は無理数であることを示せ．

（配点率 20 %）

$\boxed{3}$ 正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}\,(0,\ t)$ と $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$ を考える．t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，座標平面内で線分 PQ が通過する部分を図示せよ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{4}$ $f(x) = \log(x+1) + 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = x$ は，$x > 0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ．

(2) (1) の解を α とする．実数 x が $0 < x < \alpha$ を満たすならば，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$0 < \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x)$$

(3) 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

で定める．このとき，すべての自然数 n に対して，

$$\alpha - x_{n+1} < \frac{1}{2}(\alpha - x_n)$$

が成り立つことを示せ．

(4) (3) の数列 $\{x_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ を示せ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{5}$　座標平面において，t を媒介変数として

$$x = e^t \cos t + e^\pi, \quad y = e^t \sin t \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする．曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

（配点率 20 ％）