入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

大阪大学（理系）

対象年度： 2021 年

試験時間： 150 分

問題数： 5 問

第　1　問

$a,\ b$ を $ab<1$ をみたす正の実数とする．xy 平面上の点 $\mathrm{P}\,(a,\ b)$ から，曲線 $y=\dfrac{1}{x}\quad(x>0)$ に 2 本の接線を引き，その接点を $\mathrm{Q}\left(s,\ \dfrac{1}{s}\right)$，$\mathrm{R}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ とする．ただし，$s<t$ とする．

(1)　s および t を $a,\ b$ を用いて表せ．

(2)　点 $\mathrm{P}\,(a,\ b)$ が曲線 $y=\dfrac{9}{4}-3x^2$ 上の $x>0,\ y>0$ をみたす部分を動くとき，$\dfrac{t}{s}$ の最小値とそのときの $a,\ b$ の値を求めよ．

第　2　問

空間内に，同一平面上にない 4 点 O，A，B，C がある．s，t を $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ をみたす実数とする．線分 OA を $1:1$ に内分する点を $\mathrm{A_0}$，線分 OB を $1:2$ に内分する点を $\mathrm{B_0}$，線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．さらに 4 点 $\mathrm{A_0}$，$\mathrm{B_0}$，P，Q が同一平面上にあるとする．

(1)　t を s を用いて表せ．

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 1$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 2$，$\angle\mathrm{AOB} = 120^\circ$，$\angle\mathrm{BOC} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{COA} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{POQ} = 90^\circ$ であるとき，s の値を求めよ．

第 3 問

n を自然数とし，t を $t \geqq 1$ をみたす実数とする．

(1) $x \geqq t$ のとき，不等式

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) 不等式

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{2tn^2} \leqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(3) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = q$ をみたすような実数 p，q の値を求めよ．

第 4 問

整数 a，b，c に関する次の条件 $(*)$ を考える．

$$\int_a^c (x^2+bx)\,dx = \int_b^c (x^2+ax)\,dx \quad \cdots\cdots (*)$$

(1) 整数 a，b，c が $(*)$ および $a \neq b$ をみたすとき，c は 3 の倍数であることを示せ．

(2) $c=3600$ のとき，$(*)$ および $a<b$ をみたす整数の組 $(a,\ b)$ の個数を求めよ．

第　5　問

次の問いに答えよ．

(1) a を実数とする．x についての方程式 $x - \tan x = a$ の実数解のうち，$|x| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたすものがちょうど 1 個あることを示せ．

(2) 自然数 n に対し，$x - \tan x = n\pi$ かつ $|x| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数 x を x_n とおく．t を $|t| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とする．このとき，曲線 $C : y = \sin x$ 上の点 $\mathrm{P}\,(t,\ \sin t)$ における接線が，不等式 $x \geqq \dfrac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は，t が $x_1, x_2, x_3, \ldots$ のいずれかと等しいことであることを示せ．