入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

大阪大学（理系）

対象年度： 2021 年

試験時間： 150 分

問題数： 5 問

（下 書 き 用 紙）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{1}$　a, b を $ab < 1$ をみたす正の実数とする．xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から，曲線 $y = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$ に 2 本の接線を引き，その接点を $\mathrm{Q}\left(s,\ \dfrac{1}{s}\right)$, $\mathrm{R}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ とする．ただし，$s < t$ とする．

(1) s および t を a, b を用いて表せ．

(2) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が曲線 $y = \dfrac{9}{4} - 3x^2$ 上の $x > 0$, $y > 0$ をみたす部分を動くとき，$\dfrac{t}{s}$ の最小値とそのときの a, b の値を求めよ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{2}$ 空間内に, 同一平面上にない 4 点 O, A, B, C がある．s, t を $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ をみたす実数とする．線分 OA を $1:1$ に内分する点を A_0，線分 OB を $1:2$ に内分する点を B_0，線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．さらに 4 点 A_0，B_0，P，Q が同一平面上にあるとする．

(1) t を s を用いて表せ．

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 1$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 2$, $\angle\mathrm{AOB} = 120^\circ$, $\angle\mathrm{BOC} = 90^\circ$, $\angle\mathrm{COA} = 60^\circ$, $\angle\mathrm{POQ} = 90^\circ$ であるとき，s の値を求めよ．

（配点率 20 ％）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{3}$ n を自然数とし，t を $t \geqq 1$ をみたす実数とする．

(1) $x \geqq t$ のとき，不等式

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) 不等式

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{2tn^2} \leqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(3) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = q$ をみたすような実数 p，q の値を求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{4}$ 整数 a，b，c に関する次の条件 $(*)$ を考える．

$$\int_a^c (x^2+bx)\,dx = \int_b^c (x^2+ax)\,dx \quad \cdots\cdots (*)$$

(1) 整数 a，b，c が $(*)$ および $a \neq b$ をみたすとき，c は 3 の倍数であることを示せ．

(2) $c = 3600$ のとき，$(*)$ および $a < b$ をみたす整数の組 $(a,\ b)$ の個数を求めよ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ.

(1) a を実数とする．x についての方程式 $x - \tan x = a$ の実数解のうち，$|x| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたすものがちょうど 1 個あることを示せ.

(2) 自然数 n に対し，$x - \tan x = n\pi$ かつ $|x| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数 x を x_n とおく．t を $|t| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とする．このとき，曲線 $C : y = \sin x$ 上の点 $\mathrm{P}\,(t,\ \sin t)$ における接線が，不等式 $x \geqq \dfrac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は，t が $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$ のいずれかと等しいことであることを示せ.

（配点率 20 %）