入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

大阪大学（理系）

対象年度： 2020 年

試験時間： 150 分

問題数： 5 問

第　1　問

関数

$$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}} \qquad (x \geqq 0)$$

について，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ の最大値を求めよ．

(2)　$f(x)$ とその導関数の極限

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to\infty} f'(x)$$

をそれぞれ求めよ．ただし，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

であることを用いてもよい．

(3)　$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，グラフの凹凸を調べる必要はない．

第　2　問

1 個のさいころを n 回投げて，k 回目に出た目が 1 の場合は $X_k = 1$，出た目が 2 の場合は $X_k = -1$，その他の目が出た場合は $X_k = 0$ とする．

$$Y_k = \cos\left(\frac{\pi}{3}X_k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}X_k\right)$$

とおき，Y_1 から Y_n までの積 $Y_1Y_2Y_3\cdots Y_n$ を Z_n で表す．ただし，i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1)　Z_2 が実数でない確率を求めよ．

(2)　Z_1，Z_2，Z_3，$\cdots$，Z_n がいずれも実数でない確率を求めよ．

(3)　Z_n が実数となる確率を p_n とする．p_n を n を用いて表し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

第　3　問

n を 2 以上の自然数とする．三角形 ABC において，辺 AB の長さを c，辺 CA の長さを b で表す．$\angle \mathrm{ACB} = n\angle \mathrm{ABC}$ であるとき，$c < nb$ を示せ．

第 4 問

t を正の実数とする．xy 平面において，連立不等式

$$x \geqq 0, \qquad y \geqq 0, \qquad xy \leqq 1, \qquad x+y \leqq t$$

の表す領域の面積を $S(t)$ とおく．極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \left(S(t) - 2\log t\right)$ を求めよ．

第　5　問

3 辺の長さの和が 2 である三角形 ABC において，辺 BC の長さを a，辺 CA の長さを b で表す．三角形 ABC を辺 BC を軸として 1 回転させてできる回転体の体積を V とする．以下の問いに答えよ．

(1) a の値を固定して b の値を変化させるとき，V が最大になるのは，三角形 ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである．これを示せ．

(2) a，b の値をともに変化させるとき，V の最大値と，最大値を与える a，b の値をそれぞれ求めよ．