

入学試験過去問題

数 学

大阪大学（理系）

対象年度：2018年

試験時間：150分

問題数：5問

第 1 問

次の問いに答えよ.

- (1) $x > 0$ の範囲で不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

が成り立つことを示せ.

- (2) x が $x > 0$ の範囲を動くとき,

$$y = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}$$

のとりうる値の範囲を求めよ.

第 2 問

a, b を正の実数とし, $f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$ とする.

- (1) c を実数とし, $f(x)$ が $x - c$ で割り切れるとする. このとき, $c > 0$ であり, $f(x)$ は $(x - c) \left(x - \frac{1}{c} \right)$ で割り切れることを示せ.

- (2) $f(x)$ がある実数 s, t, u, v を用いて

$$f(x) = (x - s)(x - t)(x - u)(x - v)$$

と因数分解できるとき, $a \geq 4$ が成り立つことを示せ.

- (3) $a = 5$ とする. $f(x)$ がある実数 s, t, u, v を用いて

$$f(x) = (x - s)(x - t)(x - u)(x - v)$$

と因数分解できるような自然数 b の値をすべて求めよ.

第 3 問

2つの関数

$$f(t) = 2 \sin t + \cos 2t, \quad g(t) = 2 \cos t + \sin 2t$$

を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C: \quad x = f(t), \quad y = g(t) \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える.

- (1) t が $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ.
- (2) t_1, t_2 を $0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1) = f(t_2)$ を満たす実数とする. このとき, $g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$ が成り立つことを示せ.
- (3) C と直線 $x = 1$ が囲む領域の面積 S を求めよ.

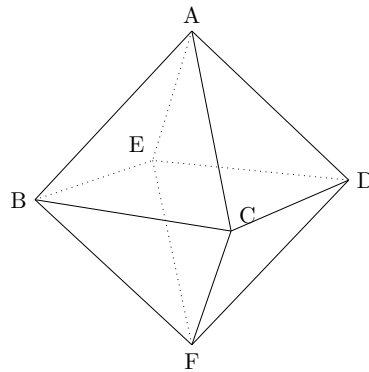
第 4 問

座標空間に 6 点

$A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(-1, 0, 0)$, $E(0, -1, 0)$, $F(0, 0, -1)$

を頂点とする正八面体 $ABCDEF$ がある. s, t を $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ を満たす実数とする. 線分 AB , AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P , Q とし, 線分 FD , FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R , S とする.

- (1) 4 点 P , Q , R , S が同一平面上にあることを示せ.
- (2) 線分 PQ の中点を L とし, 線分 RS の中点を M とする. s, t が $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ の範囲を動くとき, 線分 LM の長さの最小値 m を求めよ.
- (3) 正八面体 $ABCDEF$ の 4 点 P , Q , R , S を通る平面による切り口の面積を X とする. 線分 LM の長さが (2) の値 m をとるとき, X を最大とするような s, t の値と, そのときの X の値を求めよ.



第 5 問

p, q を $0 < p < 1, 0 < q < 1$ を満たす実数とし, n を 2 以上の整数とする. 2 つのチーム A, B が野球の試合を n 回行う. 1 試合目に A が勝つ確率は p であるとする. また, A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p であり, B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であるとする. なお, 試合結果に引き分けはなく, 勝敗が決まるとする.

- (1) n 試合目に A が勝つ確率 a_n を求めよ.
- (2) $n \geq 3$ とする. B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ.