

入学試験過去問題

数 学

大阪大学（理系）

対象年度：2017年

試験時間：150分

問題数：5問

第 1 問

双曲線 $H: x^2 - y^2 = 1$ 上の 3 点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(s, t)(t \neq 0)$ を考える.

- (1) 点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき, P の座標を s と t を用いてあらわせ.
- (2) 点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき, Q の座標を s と t を用いてあらわせ.
- (3) 点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき, 3 点 P , Q , R は一直線上にあることを証明せよ.

第 2 問

複素数 z は $z^5 = 1$ を満たし、実部と虚部がともに正であるものとする．硬貨を投げて表が出れば 1, 裏が出れば 0 とし, 5 回投げて出た順に a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 とおく．複素数 w を $w = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4$ と定める．

- (1) 5 回とも表が出たとする． w の値を求めよ．
- (2) $a_0 = a_2 = a_3 = 0, a_1 = a_4 = 1$ のとき, $|w| < 1$ であることを示せ．
- (3) $|w| < 1$ である確率を求めよ．

第 3 問

a, b を自然数とし, 不等式

$$\left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4} \quad (\text{A})$$

を考える. 次の問いに答えよ. ただし, $2.645 < \sqrt{7} < 2.646$ であること, $\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい.

- (1) 不等式 (A) を満たし $b \geq 2$ である自然数 a, b に対して

$$\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6$$

であることを示せ.

- (2) 不等式 (A) を満たす自然数 a, b の組のうち, $b \geq 2$ であるものをすべて求めよ.

第 4 問

b, c を実数とする. 2 次関数 $f(x) = -x^2 + bx + c$ が

$$0 \leq f(1) \leq 2, \quad 5 \leq f(3) \leq 6$$

を満たすとする.

- (1) $f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ.
- (3) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき, 放物線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

第 5 問

xy 平面上で放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2$ で囲まれた図形を, y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく. 回転体 L に含まれる点のうち, xy 平面上の直線 $x = 1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく.

- (1) t を $0 \leq t \leq 2$ を満たす実数とする. xy 平面上の点 $(0, t)$ を通り, y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする. $t = (2 \cos \theta)^2 \left(\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ のとき, $S(t)$ を θ を用いてあらわせ.
- (2) M の体積 V を求めよ.