

入学試験過去問題

数 学

大阪大学（理系）

対象年度：2015 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)} \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) \quad (x \geq 0)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\int_0^n f_n(x) dx \leq \int_0^1 \log(1+x) dx$ を示せ．

(2) 数列 $\{I_n\}$ を

$$I_n = \int_0^n f_n(x) dx$$

で定める． $0 \leq x \leq 1$ のとき $\log(1+x) \leq \log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし， $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることは用いてよい．

第 2 問

実数 x, y が $|x| \leq 1$ と $|y| \leq 1$ を満たすとき, 不等式

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$

が成り立つことを示せ.

第 3 問

以下の問いに答えよ.

- (1) $\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ.
- (2) p, q を有理数とする. $\sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q$ が有理数であるとき, $p = q = 0$ であることを示せ.

第 4 問

座標空間の x 軸上に動点 P, Q がある. P, Q は時刻 0 において, 原点を出発する. P は x 軸の正の方向に, Q は x 軸の負の方向に, ともに速さ 1 で動く. その後, ともに時刻 1 で停止する. 点 P, Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A, B とし, 空間で $x \geq -1$ の部分を C とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 時刻 $t(0 \leq t \leq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ.
- (2) $V(t)$ の最大値を求めよ.

第 5 問

n を 2 以上の整数とする．正方形の形に並んだ $n \times n$ のマスに 0 または 1 のいずれかの数字を入れる．マスは上から第 1 行，第 2 行， $\dots$ ，左から第 1 列，第 2 列， $\dots$ ，と数える．数字の入れ方についての次の条件 p を考える．

条件 p : 1 から $n - 1$ までのどの整数 i, j についても，第 i 行，第 $i + 1$ 行と第 j 列，第 $j + 1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには 0 と 1 が 2 つずつ入る．

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列	
第 1 行	0	1	0	0	
第 2 行	1	0	1	1	→ 第 2 行
第 3 行	0	1	0	0	
第 4 行	1	0	1	1	→ 第 3 列

2×2 の 4 個のマス

($n = 4$ の場合の入れ方の例)

- (1) 条件 p を満たすとき，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れることを示せ．
- (2) 条件 p を満たすような数字の入れ方の総数 a_n を求めよ．