

入学試験過去問題

数 学

大阪大学（理系）

対象年度：2014 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

実数 a, b, c, d, e に対して、座標平面上の点 $A(a, b)$, $B(c, d)$, $C(e, 0)$ をとる．ただし点 A と点 B はどちらも原点 $O(0, 0)$ とは異なる点とする．このとき、実数 s, t で

$$s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

を満たすものが存在するための、 a, b, c, d, e についての必要十分条件を求めよ．

第 2 問

$t > 0$ において定義された関数 $f(t)$ は次の条件 (ア)(イ) を満たす.

(ア) $t > 0$ のとき, すべての実数 x に対して不等式

$$t \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} + f(t) \geq 1 + x$$

が成り立つ.

(イ) $t > 0$ に対して, 等式

$$t \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} + f(t) = 1 + x$$

を満たす実数 x が存在する.

このとき, $f(t)$ を求めよ.

第 3 問

$\sum_{n=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ.

第 4 問

半径 1 の 2 つの球 S_1 と S_2 が 1 点で接している. 互いに重なる部分のない等しい半径を持つ n 個 ($n \geq 3$) の球 $T_1, T_2, \dots, T_n$ があり, 次の条件 (ア)(イ) を満たす.

(ア) T_i は S_1, S_2 にそれぞれ 1 点で接している ($i = 1, 2, \dots, n$).

(イ) T_i は T_{i+1} に 1 点で接しており ($i = 1, 2, \dots, n-1$), そして T_n は T_1 に 1 点で接している.

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $T_1, T_2, \dots, T_n$ の共通の半径 r_n を求めよ.

(2) S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線のまわりに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし, $T_1, T_2, \dots, T_n$ の体積の和を W_n とするとき, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_n}{V_n}$$

を求めよ.

第 5 問

さいころを繰り返し投げ、 n 回目に出た目を X_n とする. n 回目までに出了目の積 $X_1 X_2 \cdots X_n$ を T_n で表す. T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n とし, 余りが 2, 3, 4 のいずれかである確率を q_n とする.

- (1) $p_n + q_n$ を求めよ.
- (2) p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ.
- (3) $r_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n p_n$ において r_n を求めることにより, p_n を n の式で表せ.