

入学試験過去問題

数 学

大阪大学（理系）

対象年度：2013年

試験時間：150分

問題数：5問

第 1 問

三角関数の極限に関する公式

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

を示すことにより, $\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを証明せよ.

第 2 問

不等式

$$1 \leq ||x| - 2| + ||y| - 2| \leq 3$$

の表す領域を xy 平面上に図示せよ.

第 3 問

4 個の整数

$$n+1, \quad n^3+3, \quad n^5+5, \quad n^7+7$$

がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない. これを証明せよ.

第 4 問

xyz 空間内の 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円すいを V とする. 円すい V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

第 5 問

n を 3 以上の整数とする. n 個の球 $K_1, K_2, \dots, K_n$ と n 個の空の箱 $H_1, H_2, \dots, H_n$ がある. 以下のように, $K_1, K_2, \dots, K_n$ の順番に, 球を箱に 1 つずつ入れていく.

まず, 球 K_1 を箱 $H_1, H_2, \dots, H_n$ のどれか 1 つに無作為に入れる. 次に, 球 K_2 を, 箱 H_2 が空ならば箱 H_2 に入れ, 箱 H_2 が空でなければ残りの $n-1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる.

一般に, $i = 2, 3, \dots, n$ について, 球 K_i を, 箱 H_i が空ならば箱 H_i に入れ, 箱 H_i が空でなければ残りの $n-i+1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる.

(1) K_n が入る箱は H_1 または H_n である. これを証明せよ.

(2) K_{n-1} が H_{n-1} に入る確率を求めよ.