

2013 年 度

前 期 日 程

数 学 問 題

(理系)

〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文が脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること。指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

1 三角関数の極限に関する公式

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

を示すことにより, $\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを証明せよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

2 不等式

$$1 \leq ||x| - 2| + ||y| - 2| \leq 3$$

の表す領域を xy 平面上に図示せよ.

(配点率 20 %)

3 4 個の整数

$$n + 1, \quad n^3 + 3, \quad n^5 + 5, \quad n^7 + 7$$

がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない. これを証明せよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

- 4 xyz 空間内の 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円すいを V とする. 円すい V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

5 n を 3 以上の整数とする. n 個の球 $K_1, K_2, \dots, K_n$ と n 個の空の箱 $H_1, H_2, \dots, H_n$ がある. 以下のように, $K_1, K_2, \dots, K_n$ の順番に, 球を箱に 1 つずつ入れていく.

まず, 球 K_1 を箱 $H_1, H_2, \dots, H_n$ のどれか 1 つに無作為に入れる. 次に, 球 K_2 を, 箱 H_2 が空ならば箱 H_2 に入れ, 箱 H_2 が空でなければ残りの $n - 1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる.

一般に, $i = 2, 3, \dots, n$ について, 球 K_i を, 箱 H_i が空ならば箱 H_i に入れ, 箱 H_i が空でなければ残りの $n - i + 1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる.

(1) K_n が入る箱は H_1 または H_n である. これを証明せよ.

(2) K_{n-1} が H_{n-1} に入る確率を求めよ.

(配点率 20 %)

